

## Perturbations thermiques du système balancier - spiral

### Balancier bimétallique Guillaume intégral

➡ Référence :D:\Résonateur (TE)\Data\Masse\_vol - Coef\_th - Mod\_E.mcd(R)

### Chronomètre - Balancier bimétallique à vis à serge coupée

➡ Référence :D:\Résonateur (TE)\Data\Chronomètre.mcd(R)

$$T_0 = 0.4 \text{ s} \quad f = 2.5 \text{ Hz} \quad \omega_0 := 2 \cdot \pi \cdot f \quad \Theta := 30 \quad D_{s\_ext} = 19.2 \text{ mm} \quad R_0 = 9.245 \text{ mm}$$

### Coefficients de dilatation et constantes élastiques

Balancier anibal - laiton  $\rho_1 := \rho_{anibal} \quad \rho_1 = 8.1 \times 10^3 \text{ m}^{-3} \cdot \text{kg} \quad \rho_2 := \rho_{laiton} \quad \rho_2 = 8.7 \times 10^3 \text{ m}^{-3} \cdot \text{kg}$

$$\alpha_1 := \alpha_{anib_0} \quad \alpha_1 = 8.51 \times 10^{-6} \quad \beta_1 := \alpha_{anib_1} \quad \beta_1 = -2.5 \times 10^{-9} \quad E_1 := E_{anibal} \quad E_1 = 1.63 \times 10^{11} \text{ Pa}$$

$$\alpha_2 := \alpha_{lt_0} \quad \alpha_2 = 1.85 \times 10^{-5} \quad \beta_2 := \alpha_{lt_1} \quad \beta_2 = 3 \times 10^{-10} \quad E_2 := E_{laiton} \quad E_2 = 1 \times 10^{11} \text{ Pa}$$

Spiral en acier  $\alpha_s := \alpha_{acier} \quad \alpha_s = 1.15 \times 10^{-5} \quad E_s := E_{acier}$

$$\gamma_0 := \gamma_{ac_0} \quad \gamma_0 = -2.63 \times 10^{-4} \quad \gamma_1 := \gamma_{ac_1} \quad \gamma_1 = -2 \times 10^{-7}$$

### Epaisseur des bilames pour une compensation optimale

Choix de l'épaisseur de la serge pour un même coefficient de dilatation qu'un balancier bimétallique acier-laiton

$$\alpha_R := -1.618 \cdot 10^{-4} \quad e_{bs} := \frac{-3}{2} \cdot \frac{R_0}{\alpha_R} \cdot (\alpha_2 - \alpha_1) \quad e_{bs} = 0.856 \text{ mm} \quad \text{Choix} \quad e_{bs} := 0.7 \cdot \text{mm}$$

$$\xi := \frac{E_1}{E_2} \quad e_1 := \frac{e_{bs}}{1 + \sqrt{\xi}} \quad e_2 := e_1 \cdot \sqrt{E_1 \cdot E_2} \quad e_1 = 0.307 \text{ mm} \quad e_2 = 0.393 \text{ mm}$$

### Masse et moment d'inertie de la serge à la température ambiante

$$\Theta_{ambiante} := 20$$

$$R_0 := 0.5 \cdot D_{s\_int} + e_1$$

$$M_1 := \pi \cdot \rho_1 \cdot h_s \cdot [R_0^2 - (R_0 - e_1)^2] \quad M_2 := \pi \cdot \rho_2 \cdot h_s \cdot [(R_0 + e_2)^2 - R_0^2] \quad M_{serge} := M_1 + M_2$$

$$J_{serge} := \frac{1}{2} \cdot M_1 \cdot [R_0^2 + (R_0 - e_1)^2] + \frac{1}{2} \cdot M_2 \cdot [(R_0 + e_2)^2 + R_0^2] \quad J_{serge} = 365.2 \text{ mg} \cdot \text{cm}^2 \quad M_{serge} = 416.6 \text{ mg}$$

### Rayon de courbure de la serge et coefficient de dilatation de la soudure en fonction de la température

$$D := 4 \cdot E_1 \cdot E_2 \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot e_{bs}^2 + (E_2 \cdot e_2^2 - E_1 \cdot e_1^2)^2 \quad m := \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2 \cdot R_0}$$

$$M := (\alpha_2 - \alpha_1) \cdot (E_2 \cdot e_2 - E_1 \cdot e_1) - m \cdot (E_2 \cdot e_2^2 + E_1 \cdot e_1^2) \quad m = 5.367 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$$

$$N := \frac{3}{2} \cdot (\alpha_2 - \alpha_1) \cdot (E_2 \cdot e_2^2 + E_1 \cdot e_1^2) - 2 \cdot m \cdot (E_2 \cdot e_2^3 - E_1 \cdot e_1^3) \quad D = 3.856 \times 10^9 \text{ m}^4 \text{ Pa}^2$$

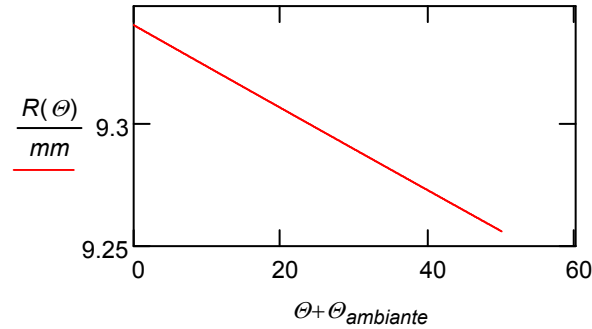
$$y(\Theta) := \frac{2 \cdot N \cdot (E_2 \cdot e_2 + E_1 \cdot e_1) - 3 \cdot M \cdot (E_2 \cdot e_2^2 - E_1 \cdot e_1^2)}{D} \cdot \Theta \quad y(\Theta) = 0.64 \text{ m}^{-1}$$

$$z(\Theta) := \frac{2 \cdot M \cdot (E_2 \cdot e_2^3 + E_1 \cdot e_1^3) - N \cdot (E_2 \cdot e_2^2 - E_1 \cdot e_1^2)}{D} \cdot \Theta \quad z(\Theta) = -2.099 \times 10^{-5}$$

$$x(\vartheta) := y(\vartheta) - \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2 \cdot R_0} \cdot \vartheta \quad g(\vartheta) := z(\vartheta) + \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} \cdot \vartheta \quad x(\vartheta) = 0.597 \, m^{-1}$$

$$R(\vartheta) := \left( x(\vartheta) + \frac{1}{R_0} \right)^{-1} \quad R(\vartheta) = 9.25605 \, mm \quad \frac{g(\vartheta)}{\vartheta} = 1.281 \times 10^{-5}$$

$$\vartheta := -20, -20 + 0.1 \dots 30$$



### Formules approchées

$$\vartheta := 30$$

$$y_a(\vartheta) := 6 \cdot (\alpha_2 - \alpha_1) \cdot \frac{E_1 \cdot E_2 \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot e_{bs}}{4 \cdot E_1 \cdot E_2 \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot e_{bs}^2 + (E_2 \cdot e_2^2 - E_1 \cdot e_1^2)^2} \cdot \vartheta \quad y_a(\vartheta) = 0.64221 \, m^{-1}$$

$$z_a(\vartheta) := \frac{1}{2} \cdot (\alpha_2 - \alpha_1) \cdot \frac{E_2^2 \cdot e_2^4 - E_1^2 \cdot e_1^4 + 4 \cdot E_1 \cdot E_2 \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot e_{bs} \cdot (e_1 - e_2)}{4 \cdot E_1 \cdot E_2 \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot e_{bs}^2 + (E_2 \cdot e_2^2 - E_1 \cdot e_1^2)^2} \cdot \vartheta \quad z_a(\vartheta) = -1.821 \times 10^{-5}$$

$$x_a(\vartheta) := y_a(\vartheta) - \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2 \cdot R_0} \cdot \vartheta \quad g_a(\vartheta) := z_a(\vartheta) + \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} \cdot \vartheta \quad x_a(\vartheta) = 0.599 \, m^{-1}$$

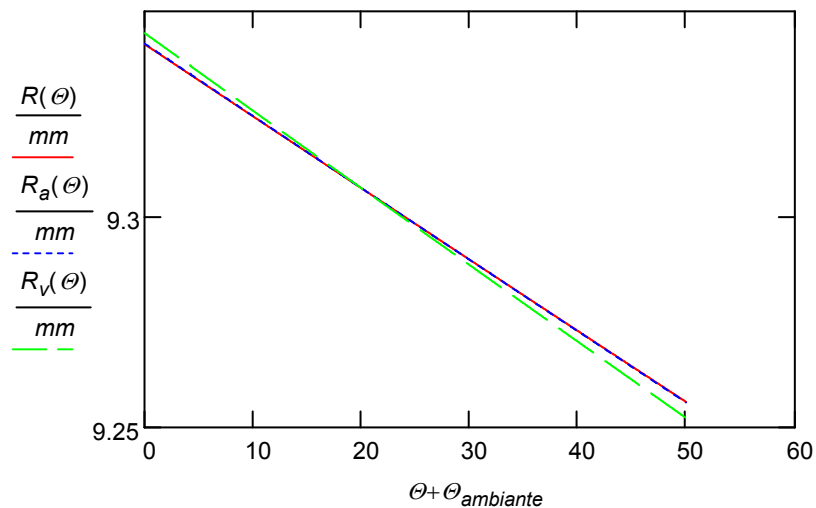
$$R_a(\vartheta) := \left( x_a(\vartheta) + \frac{1}{R_0} \right)^{-1} \quad R_a(\vartheta) = 9.25588 \, mm \quad \frac{g_a(\vartheta)}{\vartheta} = 1.29 \times 10^{-5}$$

### Formule de Villarceau

$$\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2 \cdot R_0} \cdot \vartheta = 0.044 \, m^{-1} \quad y_a(\vartheta) = 0.64221 \, m^{-1} \quad x_v(\vartheta) := y_a(\vartheta) \quad R_v(\vartheta) := \left( x_v(\vartheta) + \frac{1}{R_0} \right)^{-1}$$

$$R_v(\vartheta) = 9.25216 \, mm$$

$$\vartheta := -20, -20 + 0.1 \dots 30$$



## Variation thermique du moment d'inertie du balancier

### Moment d'inertie de la serge déformée

Approximation du moment d'inertie de la serge  $M_{bs} := M_{serge}$   $J_{bs} := M_{bs} \cdot R_0^2$   $J_{bs} = 360.9 \text{ mg} \cdot \text{cm}^2$

Position de la coupure de la serge  $\lambda_0 := (180 - 45) \cdot \text{deg}$

Coefficient de dilatation de la serge  $\alpha_R := \frac{-3}{2} \cdot \frac{R_0}{e_{bs}} \cdot (\alpha_2 - \alpha_1)$   $\alpha_R = -1.992 \times 10^{-4}$

$\alpha' := \alpha_{acier}$   $a(\theta) := R_0 \cdot (1 + \alpha' \cdot \theta) - R(\theta)$   $a(\theta) := R_0 \cdot (\alpha' - \alpha_R) \cdot \theta$

$\Delta J_{bs}(\theta) := M_{serge} \cdot R_0^2 \cdot \left[ 2 \cdot \alpha_R \cdot \theta + 4 \cdot \theta \cdot (\alpha' - \alpha_R) \cdot \frac{\sin(\lambda_0)}{\pi} \right]$   $\Delta J_{bs}(30) = -2.26 \text{ mg} \cdot \text{cm}^2$

### Variation du moment d'inertie des vis par déformation thermique de la serge

Première estimation de la masse des vis en laiton

$\rho_{lt} = 8.7 \times 10^3 \text{ m}^{-3} \cdot \text{kg}$   $d_{vis} = 1.2 \text{ mm}$   $h_{vis} = 1 \text{ mm}$   $M_{vis} = 9.839 \text{ mg}$   $nb_{vis} = 20$

Diminution du nombre de vis et augmentation de la masse des vis pour arriver à satisfaire la condition de compensation ci-dessous  $nb_{vis} := 18$   $M_{vis} := 10.5 \cdot \text{mg}$

Masse et position de chaque vis :  $j := 0 \dots \frac{nb_{vis}}{2} - 1$   $m_{v_j} := M_{vis}$

$\lambda := (0 \ 25 \ 40 \ 55 \ 70 \ 85 \ 100 \ 115 \ 130)^\text{T} \cdot \text{deg}$   $\lambda_0 = 135 \text{ deg}$

Approximation du moment d'inertie total des vis à température ambiante

$J_{tot\_vis} := 2 \cdot \sum_j \left( m_{v_j} \cdot R_0^2 \right)$   $J_{tot\_vis} = 163.728 \text{ mg} \cdot \text{cm}^2$

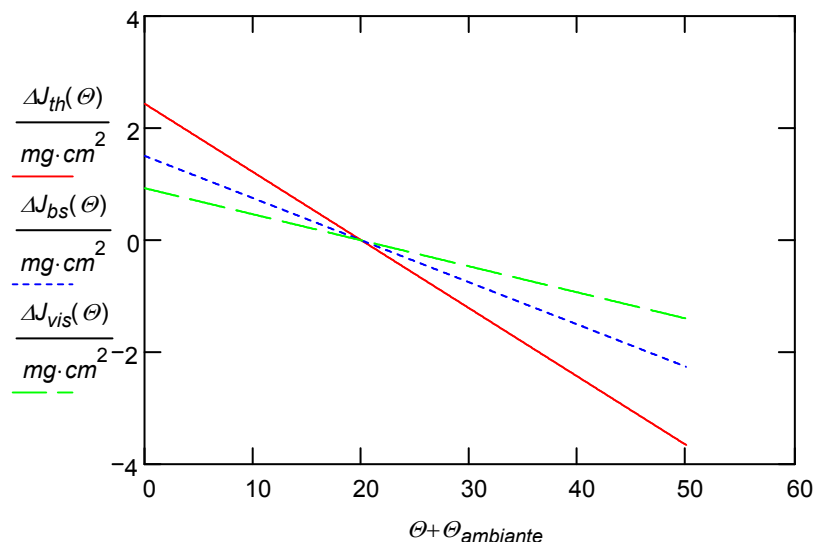
Variation du moment d'inertie des vis par déplacement thermique de celles-ci

$\Delta J_{vis}(\theta) := \sum_j \left[ 2 \cdot m_{v_j} \cdot R_0^2 \cdot [\alpha_R + (\alpha' - \alpha_R) \cdot \cos(\lambda_j)] \cdot 2 \cdot \theta \right]$   $\Delta J_{vis}(30) = -1.397 \text{ mg} \cdot \text{cm}^2$

### Variation thermique totale du moment d'inertie et graphes comparatifs

$\Delta J_{th}(\theta) := \Delta J_{bs}(\theta) + \Delta J_{vis}(\theta)$

$\frac{\Delta J_{th}(30)}{J_{bs} + J_{tot\_vis}} = -0.697 \%$



### Variation de marche totale due à la déformation thermique de la serge

Variation de marche due à la dilatation de la serge  $\delta_{bs}(\theta) := \frac{\Delta J_{bs}(\theta)}{2 \cdot (J_{bs} + J_{tot\_vis})}$   $\mu_{bs}(\theta) := -86400 \cdot \delta_{bs}(\theta)$

Variation de marche due au déplacement des vis  $\delta_{vis}(\theta) := \frac{\Delta J_{vis}(\theta)}{2 \cdot (J_{bs} + J_{tot\_vis})}$   $\mu_{vis}(\theta) := -86400 \cdot \delta_{vis}(\theta)$

Variation de marche totale (au second ordre près)

$$\delta_b(\theta) := \frac{1}{2} \cdot \left[ \alpha_R + 2 \cdot (\alpha' - \alpha_R) \cdot \frac{M_{bs} \cdot \frac{\sin(\lambda_0)}{\pi} + \sum_j (m_{v_j} \cdot \cos(\lambda_j))}{M_{bs} + 2 \cdot \sum_j m_{v_j}} \right] \cdot 2 \cdot \theta$$

$\delta_b(30) = -3.485 \times 10^{-3}$

$\mu_b(\theta) := -86400 \cdot \delta_b(\theta)$

Valeurs numériques  $\mu_{bs}(30) = 186.111$   $\mu_{vis}(30) = 115.033$   $\mu_b(30) = 301.144$

### Calculs plus précis

Moment d'inertie total des vis à température ambiante

$$J_{t\_vis} := 2 \cdot \sum_j \left[ \frac{m_{v_j}}{12} \cdot \left( \frac{3}{4} \cdot d_{vis}^2 + h_{vis}^2 \right) + m_{v_j} \cdot \left( \frac{D_{s\_ext}}{2} + \frac{h_{vis}}{2} \right)^2 \right]$$

$J_{t\_vis} = 193.126 \text{ mg} \cdot \text{cm}^2$

Moment d'inertie de la serge (déjà calculé)

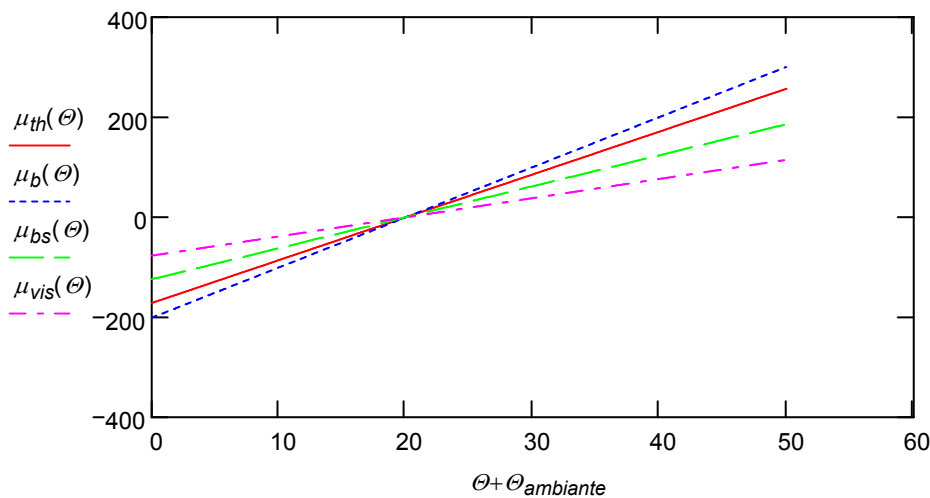
$J_{serge} = 365.185 \text{ mg} \cdot \text{cm}^2$

Moment d'inertie total du balancier (avec facteur correctif)  $J_b := 1.1 \cdot (J_{serge} + J_{t\_vis})$

$J_b = 614.142 \text{ mg} \cdot \text{cm}^2$

Variation de marche totale  $\delta_{th}(\theta) := \frac{\Delta J_{th}(\theta)}{2 \cdot (J_b)}$   $\delta_{th}(30) = -2.977 \times 10^{-3}$   $\mu_{th}(\theta) := -86400 \cdot \delta_{th}(\theta)$

$\mu_{th}(30) = 257.248$



### Condition de compensation

Spiral en acier

$$\gamma_0 = -2.63 \times 10^{-4} \quad \alpha_s := \alpha_{ac_0} \quad \alpha_s = 1.04 \times 10^{-5}$$

Variation relative de période due au spiral

$$\delta_s(\theta) := \frac{-3}{2} \cdot \alpha_s \cdot \theta \quad \delta_E(\theta) := \frac{-1}{2} \cdot \gamma_0 \cdot \theta$$

$$\delta_s(30) + \delta_E(30) = 3.477 \times 10^{-3}$$

Variation relative de période due à la déformation de la serge

$$\delta_b(30) = -3.485 \times 10^{-3}$$

Modification des masses des deux vis proches de la coupure, les plus éloignées du bras, pour une amélioration de la compensation

Modification de la masse des deux vis n°  $j_{vis} := \frac{nb_{vis}}{2} - 1 \quad j_{vis} = 8 \quad \lambda_{j_{vis}} = 130 \text{ deg}$

$$X(m_x) := 2 \cdot \left[ \frac{M_{bs} \cdot \frac{\sin(\lambda_0)}{\pi} + \sum_{j=0}^{j_{vis}-1} (m_{v_j} \cdot \cos(\lambda_j)) + m_x \cdot \cos(\lambda_{j_{vis}})}{M_{bs} + 2 \cdot \sum_{j=0}^{j_{vis}-1} m_{v_j} + 2 \cdot m_x} \right]$$

$$m_x := m_{v_{j_{vis}}} \quad m_{v_{j_{vis}}} := \text{racine} \left[ X(m_x) \cdot 10^5 - (\gamma_0 + 3 \cdot \alpha_s) \cdot 10^5, m_x \right]$$

$$m_{v_{j_{vis}}} = 10.11 \text{ mg}$$

$$\delta_b(\theta) := \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{M_{bs} \cdot \frac{\sin(\lambda_0)}{\pi} + \sum_{j=0}^{j_{vis}} (m_{v_j} \cdot \cos(\lambda_j))}{M_{bs} + 2 \cdot \sum_{j=0}^{j_{vis}} m_{v_j}} \right] \cdot 2 \cdot \theta$$

Contrôle  $\delta_s(30) + \delta_E(30) + \delta_b(30) = 0$

$$\delta_b(30) = -3.477 \times 10^{-3}$$

### Nouveau moment d'inertie du balancier

Moment d'inertie total des vis à température ambiante

$$J_{t\_vis} := 2 \cdot \sum_j \left[ \frac{m_{v_j}}{12} \cdot \left( \frac{3}{4} \cdot d_{vis}^2 + h_{vis}^2 \right) + m_{v_j} \cdot \left( \frac{D_{s\_ext}}{2} + \frac{h_{vis}}{2} \right)^2 \right] \quad J_{t\_vis} = 192.329 \text{ mg} \cdot \text{cm}^2$$

Moment d'inertie de la serge (déjà calculé)

$$J_{serge} = 365.185 \text{ mg} \cdot \text{cm}^2$$

Moment d'inertie total du balancier (avec facteur correctif)  $J_b := 1.1 \cdot (J_{serge} + J_{t\_vis})$

$$J_b = 613.265 \text{ mg} \cdot \text{cm}^2$$

### Nouvelle constante élastique du spiral

$$C = 0.055 \text{ m}^2 \text{ N} \cdot \text{m} \quad C_{cor} := \omega_0^2 \cdot J_b \quad C_{cor} = 0.061 \text{ m}^2 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Variation du couple du spiral pour conserver un montre réglée

$$C - C_{cor} = -6.318 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \frac{C - C_{cor}}{C} = -11.503 \%$$

## Graphes des déformations

➡ Référence :D:\Résonateur (TE)\Data\Définition Atan.mcd(R)

### Forme initiale de la serge et du bras

$$n := 400 \quad i := 0..n \quad \Delta\psi := 178 \cdot \text{deg} \quad j := 2..n-2 \quad R_{b_j} := -R_0 + \frac{2 \cdot R_0}{n} \cdot j$$

$$\phi_i := \lambda_0 - \pi + \frac{\Delta\psi}{n} \cdot i \quad x_0(\phi) := R_0 \cdot \cos(\phi) \quad y_0(\phi) := R_0 \cdot \sin(\phi) \quad r_0(\phi) := \sqrt{x_0(\phi)^2 + y_0(\phi)^2}$$

### Déformations thermiques de la serge et du bras

$$\Theta := 50 \quad \text{Facteur d'agrandissement graphique des déformations} \quad Ag := 10 \quad \Theta := Ag \cdot \Theta$$

$$x_{th}(\Theta, \phi) := a(\Theta) + R(\Theta) \cdot \cos(\phi) \quad y_{th}(\Theta, \phi) := R(\Theta) \cdot \sin(\phi) \quad r_{th}(\Theta, \phi) := \sqrt{x_{th}(\Theta, \phi)^2 + y_{th}(\Theta, \phi)^2}$$

$$\beta_j := \text{Atan}(x_{th}(\Theta, \phi_j), y_{th}(\Theta, \phi_j))$$

